

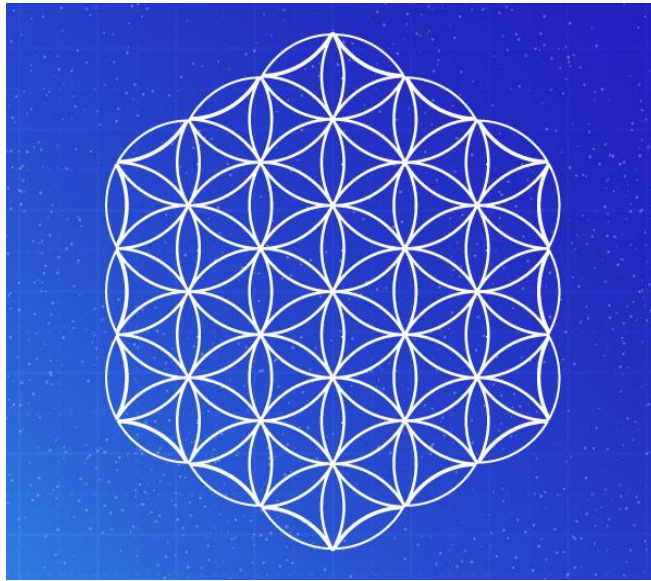


● جزوه هندسه یازدهم ریاضی

● مبحث: دایره - زاویه در دایره

✍ مولف: مهندس شهاب الدین بادام فیروز





فهرست

بخش اول..... زاویه در دایره

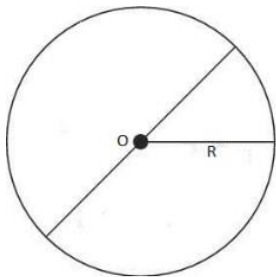
بخش دوم..... روابط طولی در دایره



درسنامه

دایره:

مکان هندسی مجموعه تمام نقاطی از یک صفحه که از نقطه ثابتی به نام مرکز، به یک فاصله هستند. به این فاصله ثابت شعاع می‌گوییم.



دایره ی با نام C با مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

وتر:

پاره خطی که دو نقطه از دایره را به هم وصل می‌کند.

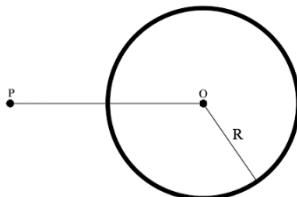
در دایره C با شعاع R محیط و مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

محیط: $2\pi R$

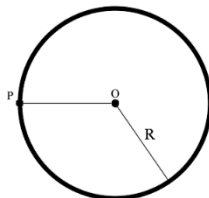
مساحت: πR^2

وضعیت نقطه و دایره:

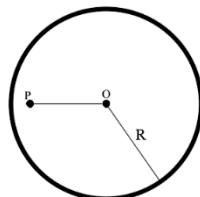
الف) نقطه P خارج از دایره قرار دارد.



ب) نقطه P روی دایره قرار دارد.

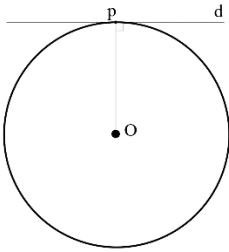


پ) نقطه P درون دایره قرار دارد.



وضعیت خط و دایره:

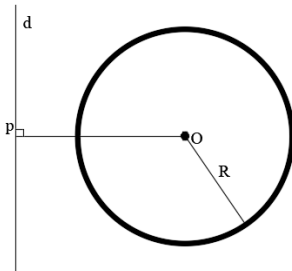
مماس: خطی که از نقطه P واقع بر روی دایره می‌گذرد و بر شعاع OP عمود است.



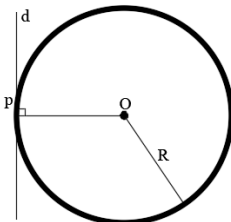
$$op \perp d$$

برای بررسی وضعیت خط و دایره ابتدا باید فاصله مرکز دایره تا خط را محاسبه کنیم و در گام بعد فاصله به دست آمده را با شعاع دایره مقایسه کنیم.

الف) هیچ نقطه مشترکی ندارند.

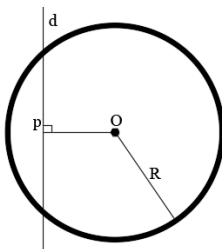


$$OP > R$$



$$OP = R$$

ب) مماس



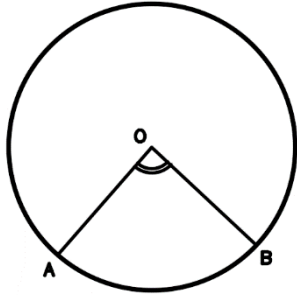
$$OP < R$$

پ) متقاطع



کمان زاویه مرکزی در دایره:

زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره اند. بر اساس روابط، اندازه هر زاویه مرکزی، مساوی اندازه کمان مقابل آن است.



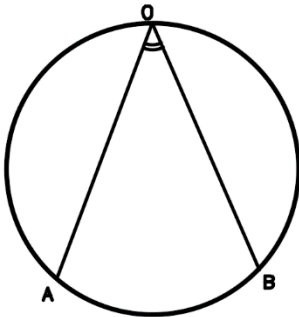
زاویه مرکزی:

اندازه زاویه مرکزی برابر با کمان مقابل آن است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

زاویه محاطی:

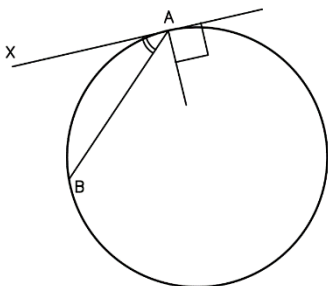
زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع های آن وترهایی از دایره اند. اندازه زاویه محاطی، برابر با نصف کمان مقابل آن است.



$$\widehat{AOB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

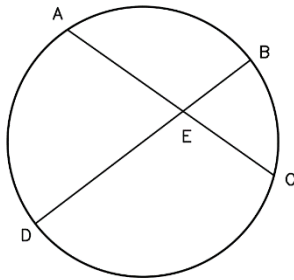
زاویه ظلّی:

زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، اندازه زاویه ظلّی، برابر با نصف کمان مقابل آن است.



$$\widehat{XAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$





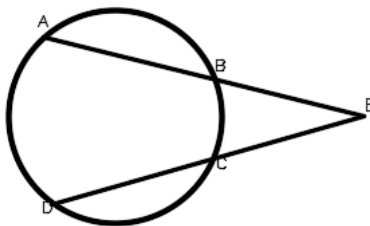
$$\widehat{AED} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

زاویه بین دو وتر متقاطع در دایره:

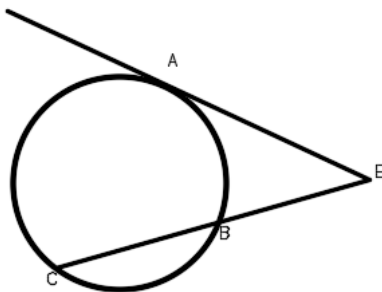
برابر با نصف مجموع دو کمان مقابل آن است.

زاویه بین دو امتداد متقاطع در خارج از دایره:

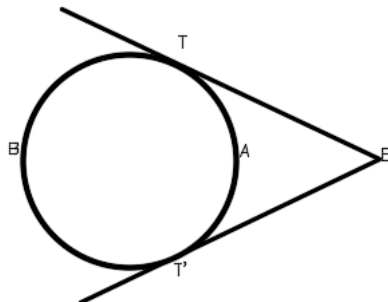
اندازه زاویه ای که از برخورد دو وتر از دایره ایجاد میشود برابر با قدرمطلق نصف تفاضل اندازه دو کمانی از دایره که به ضلع ها و امتداد اضلاع آن زاویه محدود است.



$$\widehat{E} = \frac{|\widehat{AD} - \widehat{BC}|}{2}$$



$$\widehat{E} = \frac{|\widehat{AC} - \widehat{AB}|}{2}$$

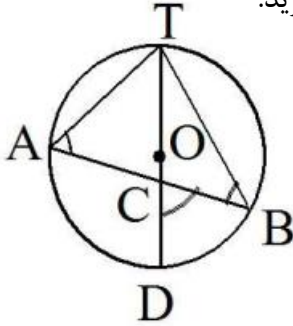


$$\widehat{E} = \frac{|\widehat{BT'} - \widehat{AT}|}{2}$$



مثال ها

مثال ۱: مطابق شكل زير $\widehat{B} = 35^\circ$ و $\widehat{A} = 60^\circ$ ميباشد. زاويه \widehat{C} را به دست آوريد.



حل: زاويه محاطي هستند. بنابرين داريم:

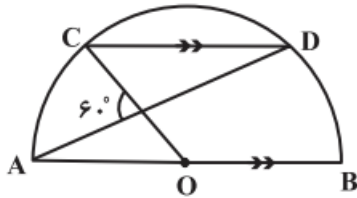
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2} \Rightarrow \widehat{TB} = 2\widehat{A} = 130^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \Rightarrow \widehat{AT} = 2\widehat{B} = 110^\circ$$

وتر TD دايره را به دو قسمت مساوي تقسيم ميکند. پس:

$$\widehat{TB} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{AT} + \widehat{BD}}{2} = \frac{110^\circ + 50^\circ}{2} = 80^\circ$$

مثال ۲: در شكل روبه رو O مرکز دايره و $AB \parallel CD$ ميباشد. اندازه کمان CD چقدر است؟



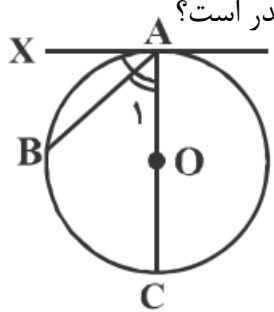
حل:


$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \frac{\widehat{DB}}{2} = \alpha \\ \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{AC} = 2\alpha$$

$$\Delta AON: 120^\circ + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \xrightarrow{\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ} \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha = 20^\circ$$



◀ مثال ۳: در شکل رو به رو اندازه زاویه ظلی A برابر 50 درجه است. اندازه کمان BC چقدر است؟

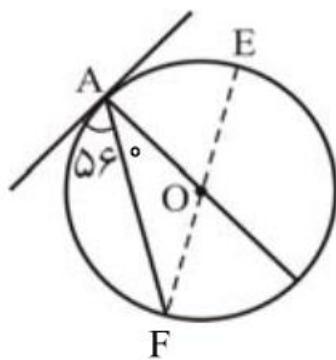



حل: 

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

◀ مثال ۴: در شکل رو به رو O مرکز دایره و زاویه ظلی برابر 56 درجه میباشد. کمان AE چند درجه است؟

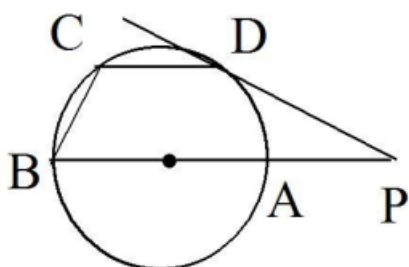



حل:  وتر FE از مرکز دایره می گذرد پس: $\widehat{AF} + \widehat{EA} = 180^\circ$

$$\frac{\widehat{AF}}{2} = 56^\circ \Rightarrow \widehat{AF} = 112^\circ$$

$$\widehat{AF} + \widehat{EA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EA} = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

◀ مثال ۵: در شکل رو به رو AB قطر دایره و زاویه C برابر 110 درجه میباشد، زاویه P چند درجه است؟



حل: 

$$\widehat{C} = 110^\circ = \frac{\widehat{DAB}}{2} = \frac{\widehat{DA} + \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{DA} + \widehat{AB} = 220^\circ \xrightarrow{\widehat{AB} = 180^\circ} \widehat{DA} = 40^\circ$$

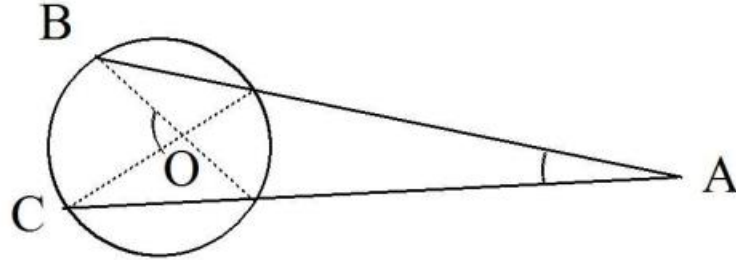
$$\widehat{BCD} = 360^\circ - (\widehat{DA} + \widehat{AB}) = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{DA}}{2} = \frac{140^\circ - 40^\circ}{2} = 50^\circ$$



مثال ۶: در شکل رو به رو زاویه A برابر ۲۰ درجه و زاویه O برابر ۷۱ درجه است. کمان BC چند درجه است؟

حل:

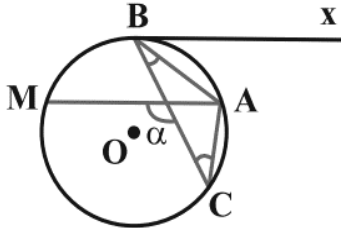


$$\widehat{BC} = X$$

$$\widehat{MN} = Y$$

$$\begin{cases} \frac{X-Y}{2} = 27^\circ \\ \frac{X+Y}{2} = 71^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - Y = 54^\circ \\ X + Y = 142^\circ \end{cases} \Rightarrow X = \frac{54^\circ + 142^\circ}{2} = 98^\circ \Rightarrow Y = 98^\circ - 54^\circ = 44^\circ$$

مثال ۶: در شکل زیر $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^\circ$ و $AM \parallel BX$ است. زاویه α چند درجه است؟



حل:

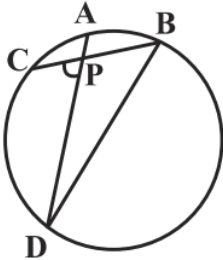
$$\begin{cases} \widehat{ACB} = 30^\circ \rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ \\ \widehat{ABC} = 30^\circ \rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ \\ \widehat{BAM} = \widehat{XBA} = 30^\circ \rightarrow \widehat{MB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{MC} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{MB}) = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{MC} + \widehat{AB}}{2} = 120^\circ$$



تست ها:

۱. در شکل زیر، $\widehat{D} = \widehat{B}/2$ زاویه P چند برابر کمان AB است؟



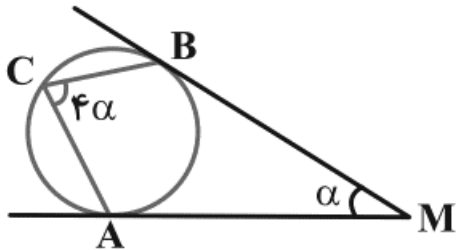
۱. ۲/۳

۲. ۱

۳. ۳/۲

۴. ۲

۲. در شکل رو به رو مقدار α چقدر است؟



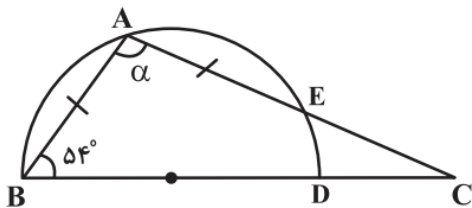
۱. ۲۰

۲. ۲۵

۳. ۳۰

۴. ۱۵

۳. در شکل رو به رو $\widehat{AB} = \widehat{AE}$ و BD قطر نیم دایره است. مقدار a چقدر است؟



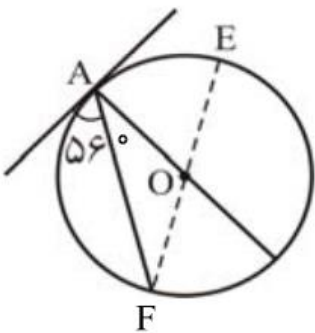
۱. ۱۰۸

۲. ۱۱۶

۳. ۱۲۰

۴. ۱۲۶

۴. در شکل زیر O مرکز دایره و A زاویه ظلی دایره میباشد. کمان AE چند درجه است؟



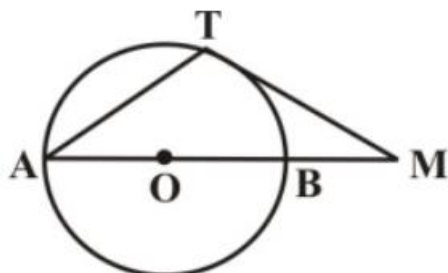
۱. ۶۸

۲. ۶۶

۳. ۶۴

۴. ۶۲





۵. در شکل زیر اگر MT برابر AT باشد، اندازه زاویه A کدام است؟

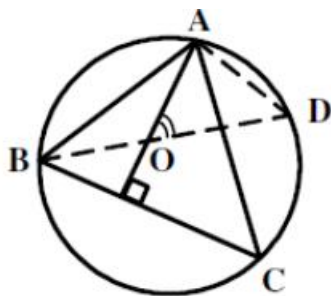
۱. ۱۵

۲. ۴۵

۳. ۶۰

۴. ۳۰

۶. در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع های مثلث ABC است. زاویه AOD برابر کدام است؟



۱. OBC

۲. CAD

۳. OAC

۴. ADO

شماره تست	جواب
۱	گزینه ۳
۲	گزینه ۱
۳	گزینه ۱
۴	گزینه ۱
۵	گزینه ۴
۶	گزینه ۲

برای دانلود ادامه جزوه هندسه و استفاده از جزوات بیشتر به نیم خط سر بزنید.

www.nimkhat.com

