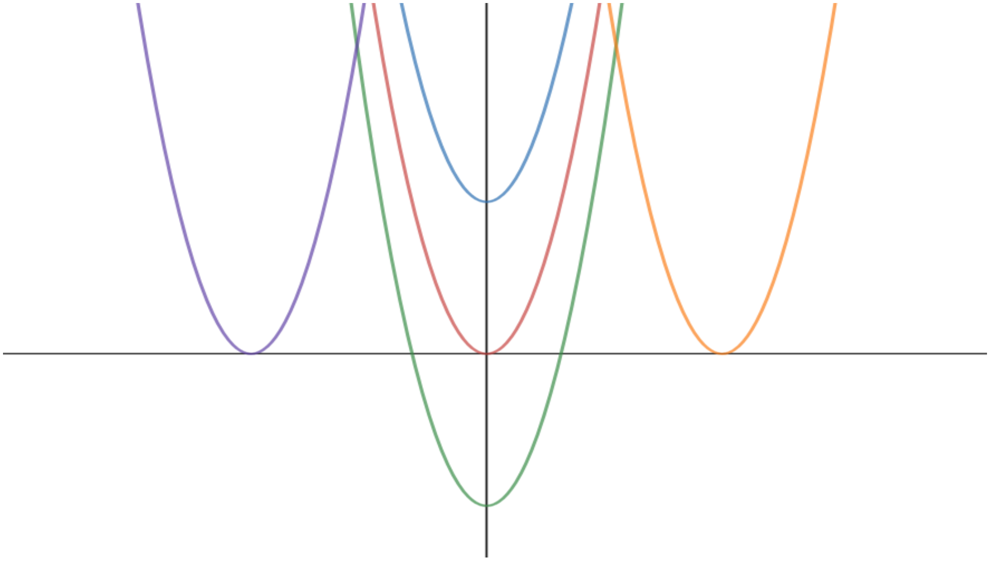
جزوه حسابان

مبحث: تابع درجه دوم(۱)

مولف: مهندس رضا امینی



فهرست

مولف : مهندس رضا امینی

تابع درجه دوم

تابع به فرم زیر را که بیشترین توان x برابر ۲ است تابع درجه دوم می‌گوییم:

$$f(x) = ax^{۲} + bx + c \qquad (۱)$$

که حالتی خاص از تابع چند جمله‌ای زیر به ازای مقدار $n = ۲$ می‌باشد:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x^۱ + a_۰ x^۰ \qquad (۲)$$

مثال۱: تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۲$ را داریم، مقدار $۲f(۳) - ۶f(۲)$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از جایگذاری مقادیر را بدست می‌آوریم:

$$\rightarrow f(۳) = ۲ \times (۳)^۲ - ۴ \times (۳) + ۲ = ۸$$

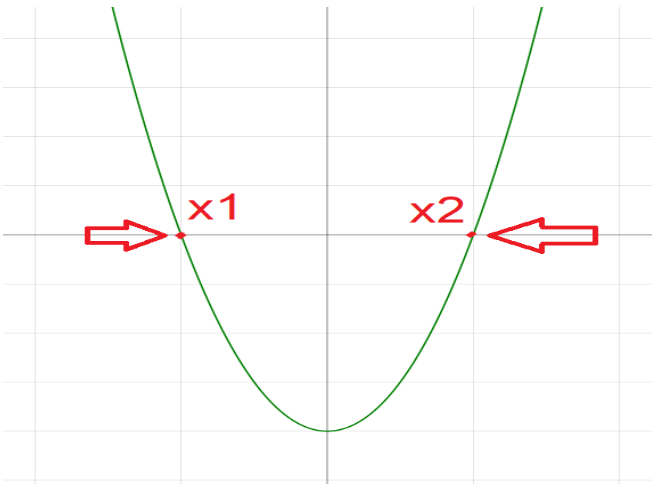
$$\rightarrow f(۲) = ۲ \times (۲)^۲ - ۴ \times (۲) + ۲ = ۲$$

$$\rightarrow ۲ \times (۸) - ۶ \times (۲) = ۴$$

ریشه‌های معادله درجه دوم

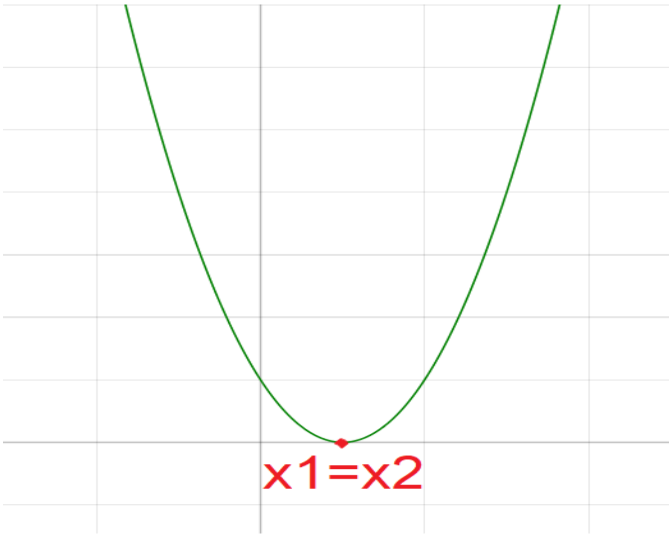
منظور از ریشه‌ها یک معادله درجه دوم یا صفرهای تابع درجه دوم، طول نقاطی است که نمودار تابع درجه دوم محور طول‌ها (x ها) را قطع می‌کند. یک تابع درجه دوم ممکن است به سه حالت محور طول‌ها را قطع کند. در زیر این سه حالت را همراه با نمودار آن‌ها توضیح می‌دهیم:

۱) قطع کردن محور طول‌ها در دو نقطه(۲ ریشه متفاوت)



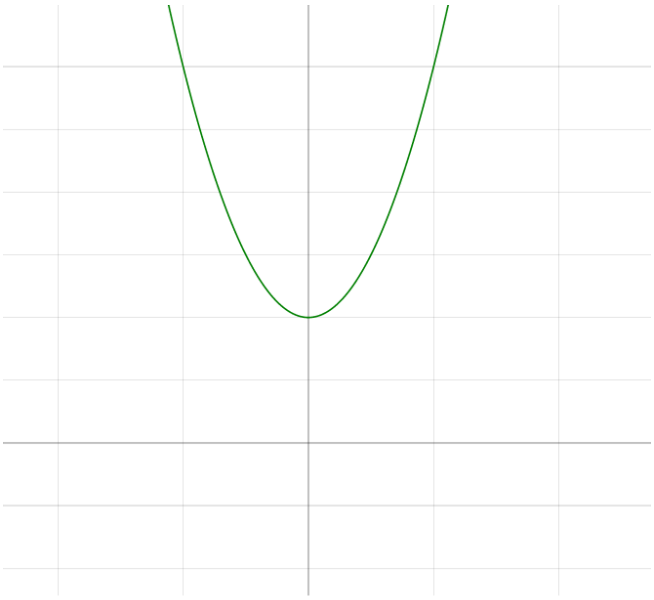
شکل۱.نمودار تابع درجه دوم با دو ریشه

۲- قطع کردن محور طول‌ها در یک نقطه(یک ریشه مضاعف)



شکل۲. نمودار تابع درجه دوم با یک ریشه مضاعف

۳) تابع درجه دوم بدون قطع کردن محور طول‌ها(بدون ریشه)



شکل۳. نمودار تابع درجه دوم بدون ریشه

توجه: تابع درجه دوم یعنی دستگاهی که مقادیر طول یعنی x را میگیرد و یک مقدار y می‌دهد اما معادله درجه دوم یعنی یافتن مقادیری از طول (x) که به ازای آن تابع صفر شود بنابرین $f(x) = ۰$ معادله است.

بدست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم(صفرهای تابع)

روش‌های متعددی برای بدست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم وجود دارد ما در اینجا روش‌های مهم و کارآمد را معرفی می‌کنیم:

۱) روش آزمون و خطا

در این روش با تشکیل جدول و مقداردهی به x و بدست آوردن مقدار y ، x را طوری کم یا زیاد می‌کنیم که y به مقدار صفر نزدیک شود این کار را ادامه می‌دهیم تا زمانی که xای را بدست آوریم که به ازای آن y صفر شود.

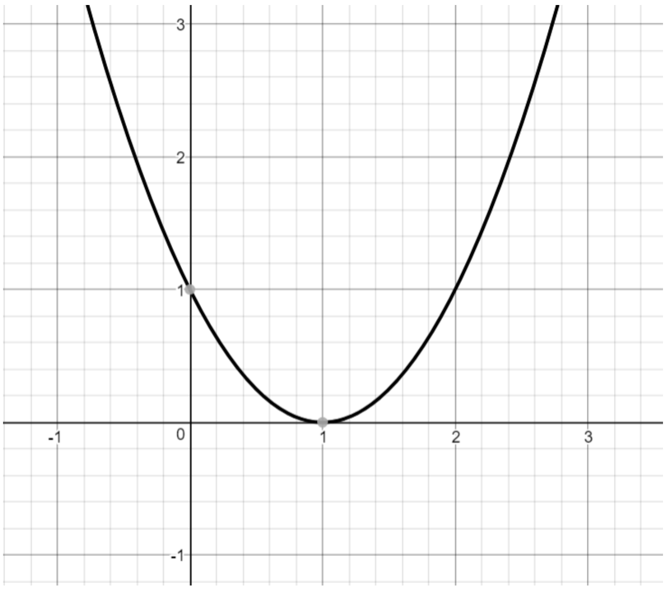
۲) تنها کردن x

معمولا به دلیل حضور توان دوم و اول x در معادله درجه دوم، با استفاده از اعمالی که در حل معادله درجه اول انجام می‌دادیم امکان حل معادله درجه دوم وجود ندارد اما اگر معادله درجه دوم فاقد x با توان یک باشد به راحتی می‌توان معادله را با تنها کردن x حل کرد به عنوان مثال:

$$f(x) = x^۲ - ۹ \rightarrow x^۲ - ۹ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۹ \rightarrow x = \pm ۳$$

۳) حل با استفاده از روش هندسی(رسم نمودار)

با رسم نمودار تابع از طریق عدد گذاری می‌توان نقاطی که محور طول‌ها را قطع می‌کند بدست آوریم. این روش مشابهت‌هایی با روش آزمون و خطا دارد.



x_1	y_1
-1	4
0	1
1	0
2	1
-2	9

شکل۴. نمودار و عددگذاری برای یک تابع درجه دوم برای بدست آوردن ریشه

با استفاده از رسم نمودار روی یک برگه اندازه گیری شده(میلی متری)، به راحتی می‌توان ریشه تابع را با دقت مناسبی بدست آورد.

۴) مربع کامل کردن

در این روش برای بدست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم، معادله را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم این کار با اضافه و کم کردن توان دوم نصف ضریب x با استفاده از یک مثال قدم به قدم مربع کامل کردن را توضیح می‌دهیم:

$$x^{۲}-۲x-۸=۰ \rightarrow x \text{ اضافه و کم کردن توان دوم نصف ضریب } \rightarrow \left(\frac{-۲}{۲}\right)^{۲}=۱$$

$$\rightarrow\ x^{۲}-۲x+(+۱-۱)-۸=\ x^{۲}-۲x+۱+(-۱-۸)=x^{۲}-۲x+۱-۹$$

$$\rightarrow (x-۱)^{۲}-۹=۰ \rightarrow (x-۱)^{۲}=۹ \rightarrow x-۱=\pm۳ \rightarrow \begin{cases} x-۱=+۳ \rightarrow x=+۴ \\ x-۱=-۳ \rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

۵)روش دلتا

روش دلتا در واقع همان روش مربع کامل کردن است با این تفاوت که در روش دلتا فرمولی کلی برای حل معادله درجه دوم بدست می‌آوریم در واقع اگر با استفاده از روش مربع کامل یک معادله درجه دوم را به صورت پارامتری(ضرایب غیرعددی و متغیر) حل کنیم به فرمول دلتا می‌رسیم. در زیر قدم به قدم بدست آوردن فرمول دلتا را با استفاده از روش مربع کامل کردن توضیح می‌دهیم:

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \rightarrow a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \rightarrow x \text{ اضافه و کم کردن توان دوم نصف ضریب } \rightarrow \left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

$$\rightarrow\ a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+a\left(\frac{-b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\rightarrow a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+a\left(\frac{-b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)=۰ \rightarrow\ \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\left(\frac{-b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)=۰$$

$$\rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\left(\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{c}{a}\right)=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}} \rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

$$\rightarrow\ \Delta\left(\text{دلتا}\right)=\ b^{۲}-۴ac \rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\frac{\Delta}{۴a^{۲}}\ \rightarrow\ x=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}-\frac{b}{۲a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$\rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\quad ,\quad \Delta=\ b^{۲}-۴ac \rightarrow \text{دو جواب} \rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_{۲}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \qquad (۳)$$

بنابرین a ضریب $x^{۲}$، b ضریب x و c مقدار عدد ثابت یا عرض از مبدا معادله درجه دوم است.($x_{۱}$ ریشه اول و $x_{۲}$ریشه دوم)

مثال۲: مجموع ریشه‌های تابع $f(x) = x^۲ + ۳x - ۵$ را بدست آورید.

حل:

$$\rightarrow \begin{cases} f(x) = x^۲ + ۳x - ۵ \\ f(x) = ax^۲ + bx + c \end{cases} \rightarrow a = +۱ \,, b = +۳ \,, c = -۵$$

$$\rightarrow \; \Delta = b^۲ - ۴ac = (۳)^۲ - ۴ \times ۱ \times (-۵) = ۲۹$$

$$\begin{cases} x_۱ = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۳ + \sqrt{۲۹}}{۲ \times ۱} \\ x_۲ = \dfrac{-۳ - \sqrt{۲۹}}{۲ \times ۱} \end{cases} \rightarrow \text{مجموع ریشه ها} \rightarrow x_۱ + x_۲ = -۳$$

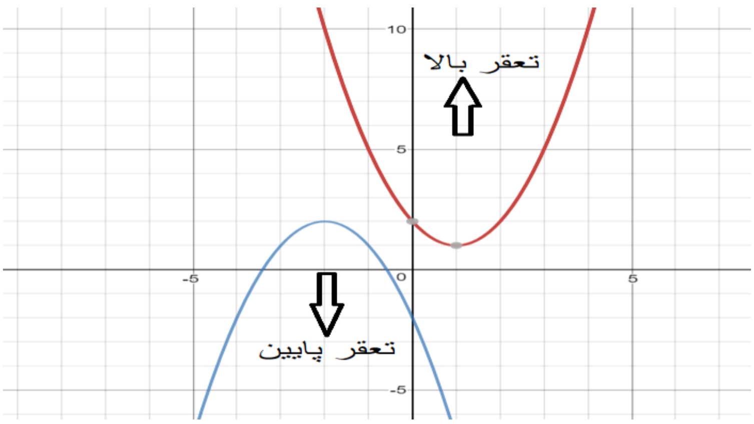
نکته۱: بر اساس منفی یا صفر و یا مثبت بودن مقدار Δ ، می‌توان تعداد جواب معادله را تعیین کرد.

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \rightarrow \text{نمودار تابع محور طولها را در هیچ نقطه ای قطع نمیکند} \\ \Delta = ۰ \rightarrow \text{معادله یک جواب دارد} \rightarrow \text{نمودار تابع محور طولها را در یک نقطه قطع میکند} \\ \Delta > ۰ \rightarrow \text{معادله دو جواب دارد} \rightarrow \text{نمودار تابع محور طولها را در دو نقطه قطع میکند} \end{cases}$$

ضرایب معادله درجه دوم

ضریب a

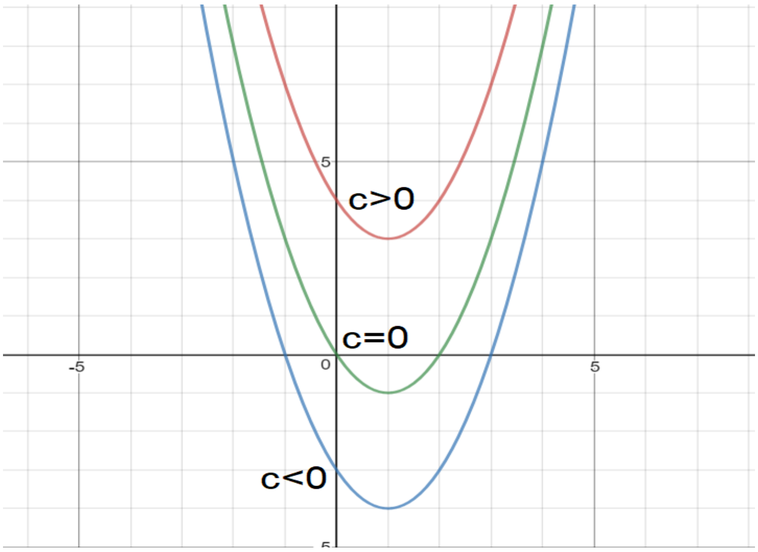
اگر $a > ۰$ باشد تعقر(فرورفتگی) نمودار تابع درجه دوم به سمت بالا خواهد بود اگر $a < ۰$ ، تعقر نمودار تابع درجه دوم به سمت پایین خواهد بود.(a نمیتواند صفر باشد زیرا نباید ضریب $x^۲$ صفر باشد.)



شکل۵. تعقر تابع درجه دوم بر اساس مثبت یا منفی بودن a

ضریب c

ضریب c، عرض از مبدا می‌باشد بنابرین مقدار y را به ازای $x=0$ بیان می‌کند. اگر این مقدار مثبت باشد نمودار تابع محور عرض‌ها را در قسمت مثبت آن قطع می‌کند.



شکل۶ . تاثیر علامت c در نمودار تابع درجه دوم

ضریب b

ضریب b به تنهایی معیار خاصی را درنمودار تابع بروز نمیدهد. اما در کنار ضریب a به صورت $\frac{-b}{2a}$ میانگین دو ریشه را بیان می‌کند. یا به عبارتی خط تقارن تابع درجه دو را نشان می‌دهد. اگر این مقدار صفر باشد دو ریشه قرینه هم خواهند بود.

$$\rightarrow\begin{cases} a>0\rightarrow\begin{cases} b>0\rightarrow \dfrac{-b}{2a}<0\rightarrow \text{میانگین منفی}\\ b<0\rightarrow \dfrac{-b}{2a}>0\rightarrow \text{میانگین مثبت}\end{cases}\\ a<0\rightarrow\begin{cases} b>0\rightarrow \dfrac{-b}{2a}>0\rightarrow \text{میانگین مثبت}\\ b<0\rightarrow \dfrac{-b}{2a}<0\rightarrow \text{میانگین منفی}\end{cases}\end{cases}$$

جمع و ضرب ریشه‌ها

در معادله درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ جمع دو ریشه برابر $\frac{-b}{a}$ و ضرب دو ریشه برابر است با $\frac{c}{a}$؛ بنابرین برای بدست آوردن مقادیر ریشه‌ها میتوانیم از این ضرایب استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}\\ x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

نکته: اگر یکی از ریشه‌ها منفی و دیگری مثبت باشد ضرب ریشه‌ها منفی خواهد بود در نتیجه مقدار $\frac{c}{a} < ۰$ خواهد بود.ولی اگر ضرب ریشه‌ها یعنی مقدار $\frac{c}{a}$ مثبت باشد یعنی دو ریشه هم‌علامت هستند.

نکته: اگر P را جمع ریشه‌ها و S را ضرب ریشه‌ها و $x_۱$ را ریشه اول و $x_۲$ را ریشه دوم در نظر بگیریم.خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = \mathrm{P} \\ x_۱ \times x_۲ = \mathrm{S} \end{cases} \to (x - x_۱)(x - x_۲) = ۰ \to \ x^۲ - (x_۱ + x_۲)x + x_۱ \times x_۲$$

$$x^۲ - (P)x + S = ۰$$

توجه: در بیشتر سوالات کنکور معادلات درجه دوم با ترفند جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها به آسانی قابل حل هستند. بنابرین بسیاری از مواقع نیازی نیست با روش دلتا وقت خود را تلف کنید.کافی است اولویت اول شما این روش باشد در صورتی که به جواب نرسیدید از روش دلتا استفاده کنید.

مثال۳: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۱- و ۹ باشد.

حل: جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} P = -۱ + ۹ = ۸ \\ S = (-۱) \times ۹ = -۹ \end{cases} \to (x - (-۱))(x - ۹) = ۰ \to \ x^۲ - (۸)x - ۹$$

مثال۴: ریشه‌های معادله $x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰$ را بدست آورید.

حل:

$$\to \begin{cases} \text{جمع دو ریشه} = \mathrm{P} = \frac{-b}{a} \to \frac{-(-۸)}{۱} = ۸ \\ \text{ضرب دو ریشه} \ = S = \frac{c}{a} \to \frac{۱۵}{۱} = ۱۵ \end{cases}$$

حال باید سعی کنیم دو عددی را بیابیم که ضرب آنها ۱۵ و جمعشان ۸ است آن اعداد ۳ و ۵ هستند. بنابرین:

$$\to \begin{cases} x_۱ = ۳ \\ x_۲ = ۵ \end{cases}$$

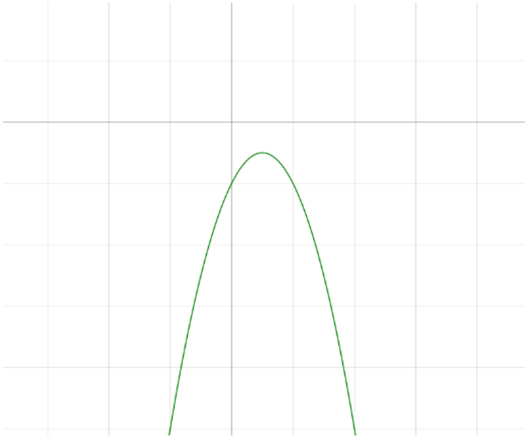
توجه: اگر دو ریشه را به صورت عدد صحیح نتوانستید حدس بزنید از روش دلتا استفاده کنید.

مثال۵: اگر در معادله درجه دوم $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$ ، P جمع ریشه‌ها و S ضرب ریشه‌ها باشد. حاصل $P^۲S + S^۲P$ را بدست آورید.

حل: در این سبک سوالات می‌بایست از اتحادها کمک بگیرید ابتدا با توجه به اتحادها و فاکتورگیری یا پخش کردن عبارت را ساده تر میکنیم سپس مقادیر را جایگذاری می‌کنیم. با توجه به روابط داریم:

$$P^۲S + S^۲P = PS(P + S) = \left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{-b}{a} + \frac{c}{a}\right) = (-۵)(۲)(-۵ + ۲) = ۳۰$$

مثال۶: علامت $a\ ,b,c$ را در نمودار مقابل تابع با فرم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ تعیین کنید.



حل:

$$\begin{cases} c < ۰ \rightarrow \text{عرض از مبدا منفی است} \\ a < ۰ \rightarrow \text{تعقر رو به پایین است} \\ \frac{-b}{۲a} > ۰ \rightarrow b > ۰ \rightarrow \text{خط تقارن در قسمت مثبت ها است} \end{cases}$$

برای دانلود جزوه تابع درجه دوم (۲) و استفاده از جزوات بیشتر به نیم‌خط سر بزنید.

www.nimkhat.com