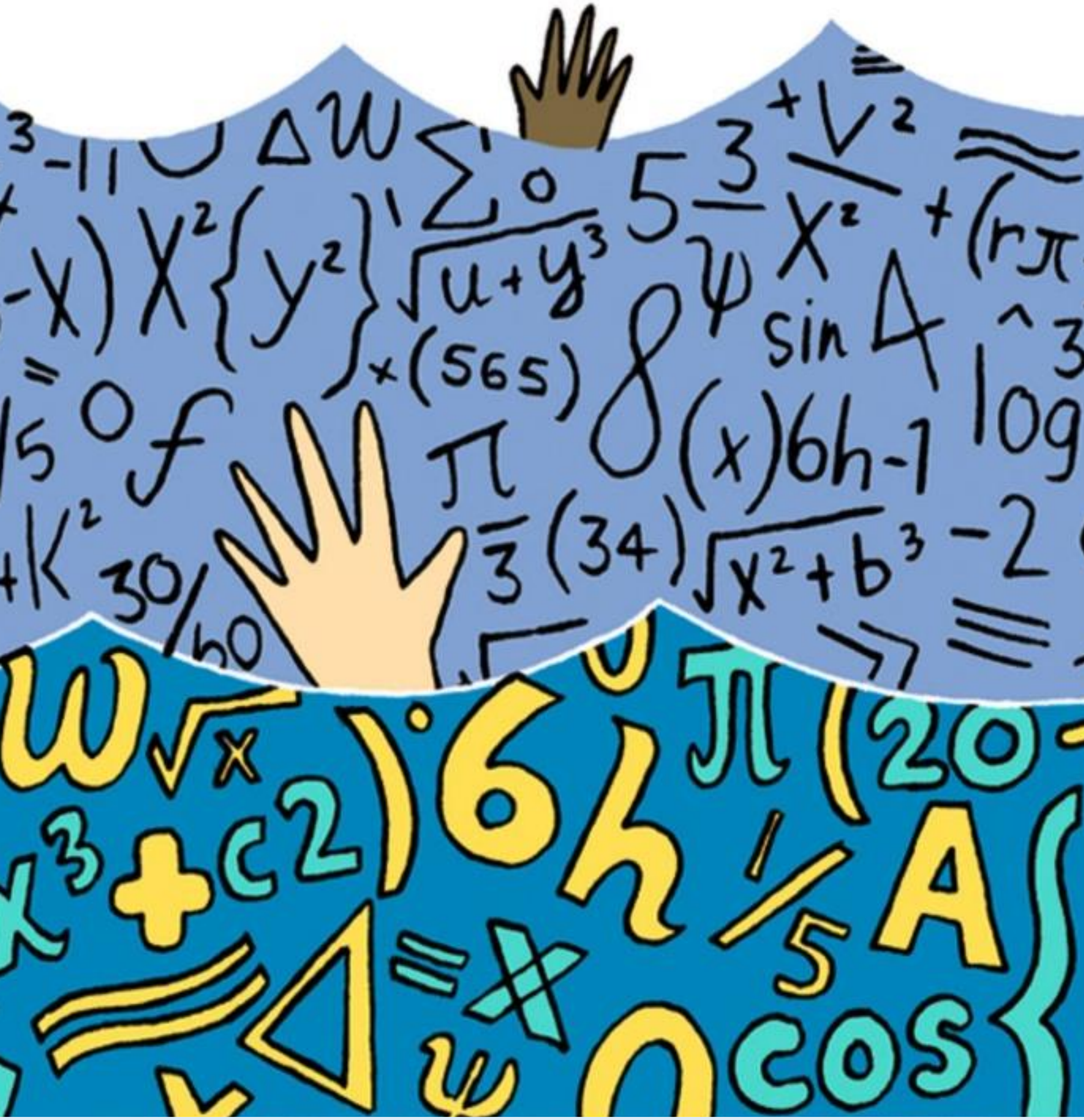
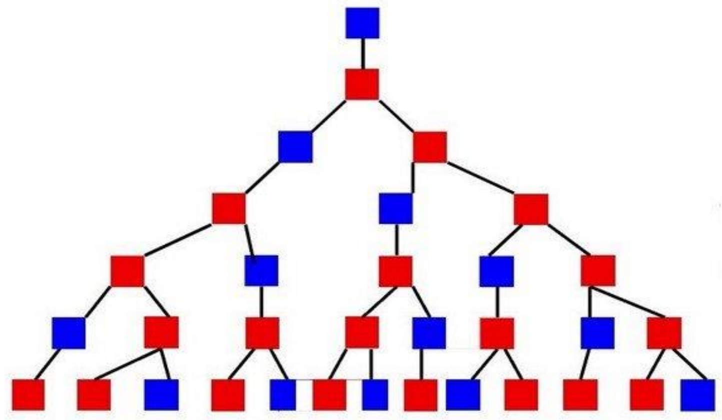


جزوه ریاضی دهم

مبحث: ترکیبیات

✍ مولف: مهندس رضا امینی

nimkhatacademy nimkhatacademy nimkhatacademy



فهرست

بخش: ترکیبیات

مولف : مهندس رضا امینی

تعریف:

ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات است که به شمارش پیشامدها و حالت های خاص میپردازد.

فاکتوریل:

فاکتوریل هر عدد طبیعی را ضرب آن عدد در تمام عددهای طبیعی کوچکتر از خودش تعریف میکنند.

$$n! = (n) \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times ۲ \times ۱ \qquad (۱\text{-}۱)$$

تذکر: فاکتوریل عدد صفر و یک برابر یک میشود ($0! = ۱ \,,\, ۱! = ۱$)

نتیجه: فاکتوریل هر عدد تقسیم بر عدد قبلی‌اش برابر خودش می‌شود.

$$\Rightarrow \frac{(n)!}{(n-۱)!} = n$$

مثال۱: n را بدست آورید.

$$\frac{(n)!}{(n-۲)!} + \frac{(n)!}{(n-۱)!} - \frac{(۹)!}{(۸)!} = ۰$$

حل:

$$\frac{(n)!}{(n-۲)!} = n(n-۱) \quad \Rightarrow \quad \frac{(n)!}{(n-۱)!} = n \quad \Rightarrow \frac{(۹)!}{(۸)!} = ۹$$

$$\Rightarrow n(n-۱) + n - ۹ = ۰ \Rightarrow n^۲ - n + n - ۹ = ۰ \Rightarrow n^۲ = ۹ \Rightarrow n = \pm ۳$$

بنابرین جواب ۳+ است زیرا ۳- عدد طبیعی نیست.

اصل ضرب(شمارش):

اگر یک فعالیت را در k مرحله متوالی ، در مرحله اول به $n_۱$ روش، در مرحله دوم به $n_۲$ روش و ... و در مرحله kام به n_k روش انجام دهیم. آن فعالیت را در کل به $n_۱ \times n_۲ \times \ldots n_k$ روش می‌توان انجام داد.

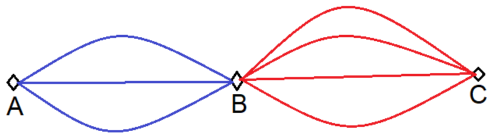
مثال۲: به چند طریق با پنج عدد ۱ تا ۵ میتوان عددی ۸ رقمی ساخت؟

حل: عدد هشت رقمی هشت جایگاه برای چیدن این پنج عدد دارد و چون تکرار ارقام اهمیتی ندارد. بنابرین برای هر عدد ۸ جایگاه داریم یا هر جایگاه ۵ عدد خواهد پذیرفت. بنابرین:

جایگاه اول: ۵ حالت   جایگاه دوم: ۵ حالت   . . . .   جایگاه هشتم: ۵ حالت

$$\text{تعداد حالات} = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۸$$

مثال ۳: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟



حل:

تعداد حالات رفتن از A به B : ۳

تعداد حالات رفتن از B به C : ۴

تعداد حالات = ۳ × ۴ = ۱۲

اصل جمع:

اگر فعالیت اول را به m_1 روش و فعالیت دوم را به m_2 روش .... و فعالیت nام را به m_n روش انجام دهیم تعداد حالات انجام یکی از این n فعالیت $(m_1+m_2+\ldots+m_n)$ روش است.

مثال ۴: تعداد حالات انتخاب یک کتاب برای مطالعه از بین ۴ کتاب فیزیک ، ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب شیمی

انتخاب یک کتاب برای مطالعه
- ۴ کتاب فیزیک
- ۳ کتاب ریاضی
- ۲ کتاب شیمی

⇦ ۴+۳+۲= ۹ حالت

نکته: کلمه "و" میان عبارت‌ها به ضرب(اصل ضرب) و کلمه "یا" به بعلاوه (اصل جمع) تعبیر میشود.

مثال ۵: به چند طریق میتوان از بین ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز و ۴ توپ سبز ،دو توپ با رنگ های متفاوت انتخاب کرد؟

حل: برای انتخاب یک توپ از بین n توپ ، n انتخاب داریم بنابرین:

یک توپ آبی **و** یک توپ قرمز ⇦ ۲×۳

یا ⇦ +

یک توپ آبی **و** یک توپ سبز ⇦ ۲×۴

یا ⇦ +

یک توپ سبز **و** یک توپ قرمز ⇦ ۴×۳

تعداد حالات = ۲ × ۳ + ۲ × ۴ + ۴ × ۳ = ۲۶

جایگشت:

تعداد حالات قرارگیری n شی متمایز در کنار هم

$n!$ = تعداد حالات

مطابق زیر تعداد حالت های قرارگیری شی‌ها در جایگاه ها نشان داده شده است در اولین جایگاه تمام اشیا می‌توانند قرار بگیرند و در جایگاه دوم تمام اشیا بجز شی‌ای که در جایگاه اول قرار گرفته است قرار می‌گیرد بدین ترتیب جایگاه ها به گونه ای پر می‌شوند که شی تکراری استفاده نشود و جایگاه ها پر شوند.در نتیجه تمام تعداد n شی متمایز در n جایگاه متمایز قرار می‌گیرند:

n	n-۱	n-۲	n-۳	n-۴	n-۵	. . . .	۵	۴	۳	۲	۱

مثال۶: با حروف کلمه TABRIZ چند کلمه می‌توان ساخت که به حرف B ختم شود؟

حل: چون حرف B در آخر کلمه ثابت خواهد بود میتوانیم آن را کلا حذف نموده و تعداد کلماتی را که با حروف کلمه TARIZ میتوان ساخت را بدست آوریم. بنابرین مطابق جایگشت پنج حرف این کلمه در ۵ جایگاه تعداد !۵ حالت خواهد داشت.

کنار هم بودن چند شی خاص:

فرض کنید از n شی متمایز k شی در کنار کنار هم قرار دهیم (طناب پیچی کنیم و کنار هم بمانند) در این حالت آن k شی را یکی در نظر میگیریم.

مثال۷: به چند حالت می‌توان با حروف کلمه NIMKHAT کلمات متفاوتی ساخت به طوری که همواره در آن حروف N و I و M در کنار هم باشند؟

حل: می‌توان کلمات را در دو بسته بندی طبقه بندی کرد.

بسته اول: تعداد حالت قرار گیری حروف I ، M، N در کنار هم: !۳

بسته دوم: تعداد حالت قرار گیری حروف H، K ، A، T و NIM در کنار هم: !۵

تعداد کل حالات: !۵ × !۳

جایگشت قرارگیری n شی به صورت دایره ای:

چون n شی متمایز می‌توانند به !n حالت جابجا شوند. با چرخش دایره هر حالت می‌تواند n حالت تکراری ایجاد کند بنابرین n شی متمایز به $\frac{(n)!}{n}$ = !(n-۱) طریق میتوانند به صورت دایره ای کنار هم قرار بگیرند.

مثال۸: سه دبیر ریاضی و دو دبیر فیزیک و چهار دانش آموز المپیادی به چند طریق می‌توانند کنار هم دور یک میز بنشینند به طوری که دبیران هر درس کنار هم و دانش آموزان کنار هم باشند.

حل: سه دبیر ریاضی به !۳ حالت و دو دبیر فیزیک به !۲ و چهار دانش آموز به !۴ حالت کنار هم می‌نشینند و این سه گروه به !۲ حالت دور یک میز می‌نشینند بنابرین:

$$\text{تعداد کل حالات} = ۲! \times ۳! \times ۲! \times ۴!$$

جایگشت با تکرار:

اگر از میان n شی، $n_۱$ شی از آنها با هم و $n_۲$ شی از آنها با هم و ... n_k شی از آنها با هم مشابه باشند (تکراری باشند) جایگشت آنها برابر است با:

$$\text{تعداد حالات} = \frac{n!}{(n_۱)!\times(n_۲)!\times\ldots\times(n_k)!}$$

مثال۹: با حروف کلمه ARAZ چند کلمه می‌توان ساخت؟

حل: حرف A دو بار تکرار شده است بنابرین داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$$

ترتیب:

انتخاب r شی از بین n شی به طوری که ترتیب انتخاب مهم باشد تعداد حالات آن برابر است با:

$$P(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب:

انتخاب r شی از بین n شی به طوری که ترتیب انتخاب مهم نباشد تعداد حالات آن برابر است با:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال۱۰: با ۵ نقطه چند پاره خط و چند بردار می‌توان ساخت؟

حل: برای پاره خط چون پاره خط AB با پاره خط BA یکی است بنابرین انتخاب ۲ از ۵ و عمل ترکیب است زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست اما برای بردار اینگونه نیست زیرا بردار جهت دار است و ابتدا و انتهای آن تعیین کننده جهت آن است. بنابرین ترتیب انتخاب مهم است و عمل ترتیب می‌باشد پس:

$$\text{بردار} = P(n,r) = \frac{۵!}{(۵-۲)!} = ۲۰$$

$$\text{پاره خط} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\times۳!} = ۱۰$$

ویژگی های مهم ترکیب:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

بخش: ترکیبیات

مولف : مهندس رضا امینی

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

✪**نکته:** تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

✪**نکته:** انتخاب r شی از n شی به طوری که فاقد m شی باشد $\binom{n-m}{r}$ است.

✪**نکته:** انتخاب r شی از n شی به طوری که شامل m شی باشد $\binom{n-m}{r-m}$ است.

مثال۱۱: به چند طریق از بین ۳ کتاب فیزیک و ۵ کتاب شیمی و ۸ کتاب ریاضی می‌توان ۴ کتاب انتخاب کرد که حداقل دو کتاب ریاضی انتخاب شده باشد؟

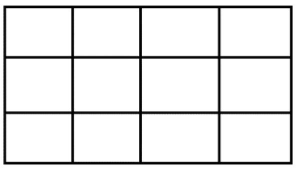
حل: حداقل دو کتاب ریاضی یعنی دو کتاب ریاضی یا سه کتاب ریاضی یا چهار کتاب ریاضی، بنابرین داریم:

(دو ریاضی و یک فیزیک و یک شیمی) یا (دو ریاضی و دو شیمی) یا (دو ریاضی و دو فیزیک) یا (سه ریاضی و یک فیزیک) یا (سه ریاضی و یک شیمی) یا (چهار ریاضی)

بنابرین:

$$\text{تعداد حالات} = \binom{8}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} + \binom{8}{2} \times \binom{5}{2} + \binom{8}{2} \times \binom{3}{2} + \binom{8}{3} \times \binom{5}{1} + \binom{8}{3} \times \binom{3}{1} + \binom{8}{4}$$

مثال۱۲: تعداد مستطیل ها در شکل مقابل چند است؟



حل:

تعداد نقاط افقی (تعداد راس ها) ۵ تا و تعداد نقاط عمودی ۴ تا است کافی است از ۵ نقطه افقی ۲ نقطه و از ۴ نقطه عمودی ۲ نقطه انتخاب کنیم تا یک مستطیل تشکیل شود چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس ترکیب است پس:

$$\text{تعداد مستطیل} = \binom{5}{2} \times \binom{4}{2}$$

مثال۱۳: با اعداد صفر و یک چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت؟

حل: تعداد حالت های قرارگیری این دو عدد در شش جایگاه یک عدد شش رقمی به این صورت است که عدد اول از سمت چپ نباید صفر باشد چون عدد را پنج رقمی میکند اما برای بقیه جایگاه ها دو حالت دارد پس:

$$۱ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵ = ۳۲$$

مثال ۱۴: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵، چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

حل: تعداد حالت های قرارگیری این ۵ عدد در ۳ جایگاه یک عدد سه رقمی به این صورت است که عدد اول از سمت چپ نباید صفر باشد بقیه جایگاه ها می‌توانند بقیه اعداد را بپذیرند همچنین اعداد نباید تکراری باشند بنابرین تعداد حالت ها از چپ به راست کم می‌شود.

۴	۴	۳

$$\Rightarrow ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

مثال ۱۵: با اعداد ۰، ۱ و ۲ چند عدد زوج دو رقمی می‌توان ساخت؟

حل: جایگاه اول عدد یک و دو (عدد صفر قابل قبول نیست زیرا عدد تک رقمی می‌شود) و جایگاه دوم عدد صفر و دو (یکان مورد نیاز برای زوج شدن) را می پذیرد بنابرین: $۲ \times ۲ = ۴$

☑ تست‌ها:

۱. ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داد هایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳)۳۶ ۴) ۴۸

۲. با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲ و ۲ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۳. حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۴. بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۵. از هر یک از مدارس D ، C ، B ، A و E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز که دوبه دو غیرهم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰　　۲) ۳۲۰　　۳) ۶۴۰　　۴) ۴۸۰

۶. به چند طریق سه مهره‌ی متمایز را می توان درون ۵ جعبه قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

۱) ۴۲　　۲) ۴۸　　۳) ۵۴　　۴) ۶۰

۷. از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۴ دانش آموز انسانی به چند طریق می توان گروه ۶ نفری انتخاب کرد، به طوریکه رئیس گروه دانش آموز تجربی باشد؟

۱) ۸۴۰　　۲) ۴۲۰　　۳) ۵۶۰　　۴) ۲۸۰

کلید تست‌ها:

سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
پاسخ	۳	۲	۳	۳	۳	۴	۴