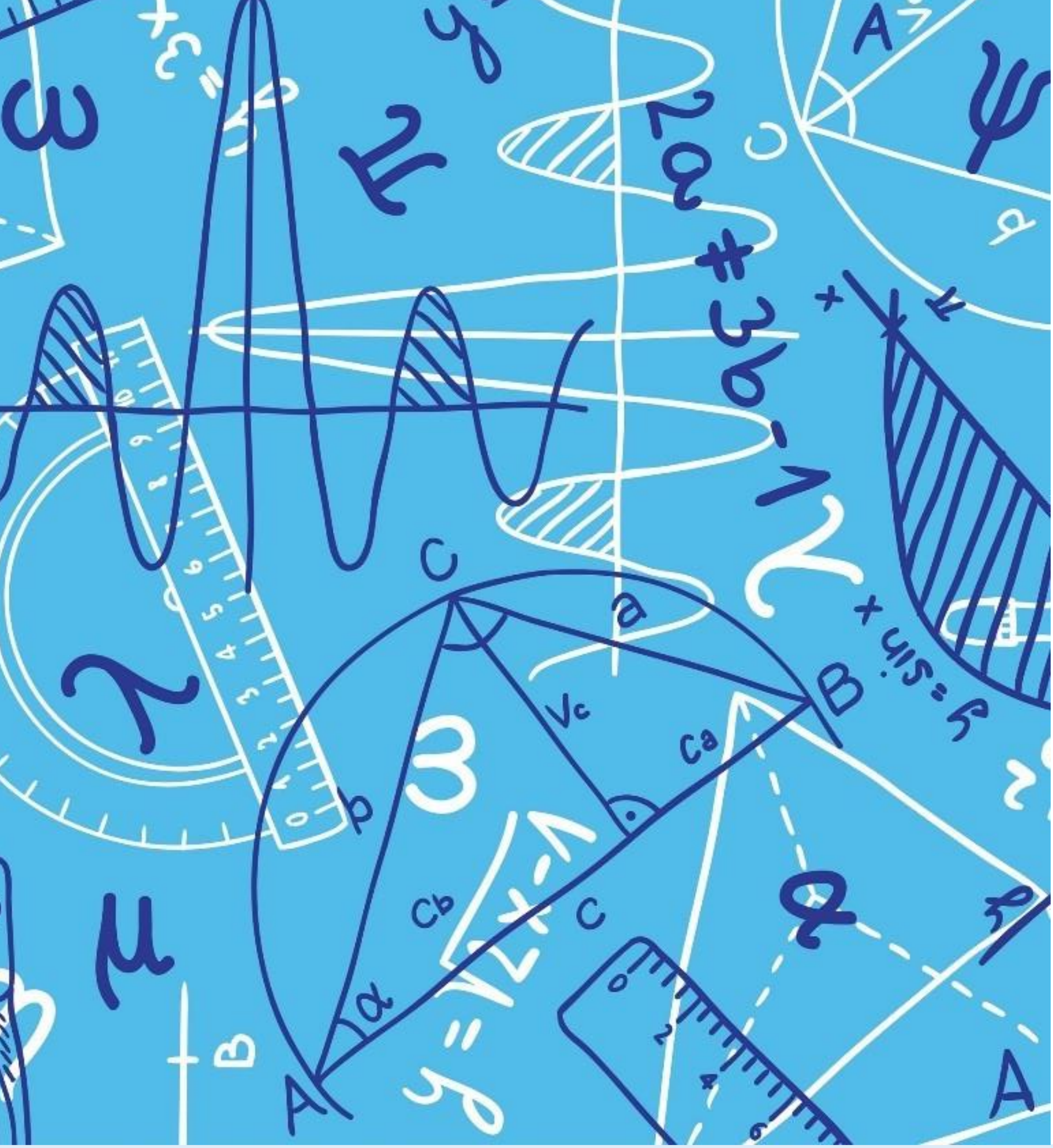

جزوه: ریاضی متوسطه اول

مبحث: اتحاد و تجزیه

مولف: مهندس رضا امینی

## فهرست


تعریف ........................................ ۱

فاکتورگیری ........................................ ۱

پخش کردن ........................................ ۱

اتحادهای مهم و نحوه بدست آوردن آنها ........................................ ۲

۱) اتحاد مربع جمع دو جمله‌ای ........................................ ۲

۲) اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای ........................................ ۲

۳)اتحاد مکعب دو جمله‌ای ........................................ ۲

۴)اتحاد مربع سه جمله‌ای ........................................ ۲

۵)اتحاد مزدوج ........................................ ۲

۶) اتحاد یک جمله مشترک ........................................ ۳

۷)اتحاد چاق و لاغر ........................................ ۴

۸)بسط چند جمله ای نیوتن ........................................ ۴

تجزیه ........................................ ۴

مولف : مهندس رضا امینی

## تعریف

اتحادها معادلات جبری‌ای مهم و پرکاربردی هستند که به ازای تمامی مقادیر صحیح می باشند و در واقع به بیان ساده‌تر برای روابط ریاضی پرکاربرد رابطه‌ای می‌سازیم که بتوانیم از آن بدون انجام محاسبات بیشتر استفاده کنیم.یا اینکه از آن برای بدست آوردن نتایج مهم بهره ببریم.

برای آنکه بتوانیم با اتحادها ارتباط برقرار کنیم ابتدا فاکتورگیری، پخش را توضیح می‌دهیم و تمامی اتحادها با این ابزار قابل اثبات و نتیجه گیری هستند.همچنین دقت داشته باشید که می‌بایست به اعمال مربوط به توان‌رسانی مسلط باشید.

## فاکتورگیری

اگر از داخل یک عبارت جبری بتوانیم یک عامل مشترک که در تمام جملات آن وجود دارد بیابیم می‌توانیم آن عامل را از میان عبارت جبری خارج کنیم که به این کار فاکتورگیری می‌گوییم و مثال زیر مفهوم را بهتر القا خواهد کرد.

$$\mathrm{A} = 2x^2yz^3 + 2xy - 6x^2y^2$$

به عبارت بالا توجه کنید اول اینکه این عبارت یک عبارت جبری شامل سه جمله می‌باشد و همچنین عاملی که در تمامی جملات آن مشترک است $2xy$ می‌باشد بنابرین می‌توانیم عمل فاکتورگیری را با $2xy$ انجام دهیم بنابرین داریم:

$$\mathrm{A} = 2x^2yz^3 + 2xy - 6x^2y^2 = 2xy \times xz^2 + 2xy \times 1 + 2xy \times (-3xy)$$

$$\to A = 2xy(xz^2 + 1 - 3xy)$$

یا به مثال عددی زیر توجه کنید:

$$B = 4 + 12 + 22 = 2 \times 2 + 2 \times 6 + 2 \times 11 = 2(2 + 6 + 11)$$

## پخش کردن

عکس عمل فاکتورگیری این است که یک عبارت که عاملی مشترکی از یک عبارت جبری بوده است و فاکتور گرفته شده است را به حالت ابتدایی بازگردانیم. با توجه به مثال زیر خواهیم داشت:

$$(x^2 + 2y)(3x - y)$$

برای بدست آوردن حاصل این عبارت

* جمله اول از پرانتز اول ضرب در جمله اول از پرانتز دوم * جمله اول از پرانتز اول ضرب در جمله دوم از پرانتز دوم

* جمله دوم از پرانتز اول ضرب در جمله اول از پرانتز دوم * جمله دوم از پرانتز اول ضرب در جمله دوم از پرانتز دوم

و علامت هر ضرب را مطابق علامت جمله‌ها اعمال می‌کنیم.

بنابرین برای این عبارت خواهیم داشت:

$$(x^2+2y)(3x-y)=$$
$$(+x^2)\times(+3x)+(+x^2)\times(-y)+(+2y)\times(+3x)+(+2y)\times(-y)=$$
$$3x^3-x^2y+6xy-2y^2$$

**اتحادهای مهم و نحوه بدست آوردن آنها**

۱) اتحاد مربع جمع دو جمله‌ای

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)\rightarrow \text{پخش کردن}\rightarrow a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\text{بنابرین}\rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

**۲) اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای**

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)\rightarrow \text{پخش کردن}\rightarrow a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\text{بنابرین}\rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

**۳)اتحاد مکعب دو جمله‌ای**

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\rightarrow \text{پخش کردن}$$

$$\rightarrow a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$$

$$\text{بنابرین}\rightarrow (a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$$

**۴)اتحاد مربع سه جمله‌ای**

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)\rightarrow \text{پخش کردن}$$

$$\rightarrow a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2\rightarrow a^2+2ab+2ac+2bc+b^2$$

$$\text{بنابرین}\rightarrow (a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+2bc+b^2$$

**۵)اتحاد مزدوج**

$$(a+b)(a-b)\rightarrow \text{پخش کردن}\rightarrow a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

$$\text{بنابرین}\rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

**توجه:** این اتحاد بسیار دوست داشتنی و در سوالات کنکور بسیارپرکاربرد است.



**مثال۱:** حاصل مقدار زیر را بدست آورید.

$$(a-b)(a+b)(a^{۲}+b^{۲})(a^{۴}+b^{۴})..(a^{۱۶}+b^{۱۶})$$

**حل:**

می دانیم $(a+b)$ و $(a-b)$ با هم مزدوج هستند و نتیجه آن‌ها نیز با $(a^{۲}+b^{۲})$ مزدوج است و همین روند ادامه دارد تا پایان. بنابرین داریم:

$$(a-b)(a+b)(a^{۲}+b^{۲})(a^{۴}+b^{۴})..(a^{۱۶}+b^{۱۶}) =$$
$$\rightarrow (a^{۲}-b^{۲})(a^{۲}+b^{۲})(a^{۴}+b^{۴})..(a^{۱۶}+b^{۱۶}) = (a^{۴}-b^{۴})(a^{۴}+b^{۴})..(a^{۱۶}+b^{۱۶}) =$$
$$(a^{۸}-b^{۸})(a^{۸}+b^{۸})(a^{۱۶}+b^{۱۶}) = (a^{۱۶}-b^{۱۶})(a^{۱۶}+b^{۱۶}) = (a^{۳۲}-b^{۳۲})$$

**۶) اتحاد یک جمله مشترک**

$$(a+x)(a+y) \rightarrow \text{پخش کردن} \rightarrow a^{۲}+ax+ay+xy = a^{۲}+(x+y)a+xy$$

$$\text{بنابرین} \rightarrow (a+x)(a+y) = a^{۲}+(x+y)a+xy$$

**نکته:** این اتحاد بسیار مهم است و در حل معادلات درجه دوم و بدست آوردن ریشه بسیار کارآمد است.

$$x^{۲}+(a+b)x+ab = ۰$$

اگر یک معادله درجه دوم به فرم بالا داشته باشیم که در آن بتوان دو عدد حدس زد که جمع آن‌ها$(a+b)$ مضرب $x$ و ضربشان $(ab)$ به صورت عدد ثابت باشد می توانیم از خاصیت تجزیه استفاده کرده و جواب آن معادله را بدست آوریم:

$$x^{۲}+(a+b)x+ab = ۰ \rightarrow x^{۲}+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b) = ۰$$

می دانیم حاصل ضرب دو عبارت در هم در صورتی صفر می شود که یکی از آن‌ها یا هر دویشان صفر باشند یعنی:

$$۰ \times n = ۰ \text{ یا } \mathrm{m} \times ۰ = ۰ \text{ یا } ۰ \times ۰ = ۰$$

بنابرین یکی از عبارت های بالا یعنی $(x+b)$ یا $(x+a)$ صفر خواهند بود. پس:

$$\begin{cases} (x+a) = ۰ \rightarrow x = -a \\ (x+b) = ۰ \rightarrow x = -b \end{cases}$$

**مثال۲:** ریشه های معادله $x^۲ + ۴x + ۳ = ۰$ را بدست آورید.

**حل:** با توجه به نکته بالا ابتدا عبارت را تجزیه می‌کنیم سپس مقدار ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

$$x^۲ + ۴x + ۳ = ۰ \rightarrow x^۲ + (۱ + ۳)x + ۳ = ۰ \rightarrow (x + ۱)(x + ۳) = ۰$$

$$\begin{cases} x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \\ x + ۳ = ۰ \rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

**۷)اتحاد چاق و لاغر**

$$(a + b)(a^۲ - ab + b^۲) \rightarrow \text{پخش کردن} \rightarrow a^۳ - a^۲b + ab^۲ + ba^۲ - b^۲a + b^۳ = a^۳ + b^۳$$

$$\text{بنابرین} \rightarrow (a + b)(a^۲ - ab + b^۲) = a^۳ + b^۳$$

**۸)بسط چند جمله ای نیوتن**

$$(a + b)^n = \binom{n}{۰} a^n b^۰ + \binom{n}{۱} a^{n-۱} b^۱ + \cdots + \binom{n}{n-۱} a^۱ b^{n-۱} + \binom{n}{۰} a^۰ b^n$$

و می دانیم که:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \rightarrow \text{مثال} \rightarrow \binom{n}{۰} = \frac{n!}{۰! \times n!} = ۱$$

**تجزیه**

در بسیاری از مسائل ریاضی پیش خواهد آمد که دو عبارت را از بالا و پایین یک کسر ساده کنیم یا در جریان یک معادله یک چند جمله‌ای عجیب و پیچیده را تبدیل به حاصل ضرب چند عبارت ساده تبدیل کنیم این عمل تجزیه نام دارد یعنی یک عبارت بزرگ را به اجزای سازنده اش تجزیه کنیم. این عمل در واقع عمل عکس اتحاد است.

**توجه:** اتحاد همان عمل پخش کردن و تجزیه همان عمل فاکتورگیری می‌باشد.

**مثال۳:** حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$(x^۳ - ۱)(x^۳ + ۱)(x^۳ + ۳) = ?$$

**حل:** ابتدا اتحاد مزدوج سپس اتحاد یک جمله مشترک خواهیم داشت بنابرین داریم:

$$(x^۳ - ۱)(x^۳ + ۱)(x^۶ + ۳) = (x^۶ - ۱)(x^۶ + ۳) = x^{۱۲} + ۲x^۶ - ۳$$

**مثال۴:** عبارت مقابل را ساده کنید.اگر فرض کنیم که $x = 2y$ حاصل عبارت را بدست آورید.

$$\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=?$$

**حل:** صورت کسر یک اتحاد چاق و لاغر و پایین آن مزدوج دارد بنابرین:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\to x=2y\to\frac{(2y)^2-(2y)y+y^2}{2y-y}=\frac{(2y)^2-(2y)y+y^2}{y}$$

$$=\frac{4y^2-2y^2+y^2}{y}=\frac{3y^2}{y}=3y$$

**مثال۵:** ضریب $x^3$ در عبارت مقابل چند است؟

$$(x+2)^{10}$$

**حل:** با توجه به بسط نیوتن داریم:

$$k=10-3=7\to\binom{10}{7}x^3(2)^7=\frac{10!}{7!\,3!}\times(2)^7=\frac{8\times9\times10}{6}\times128=8\times3\times10\times64$$

$$\to=15360\to=15360x^3$$

برای دانلود و استفاده از جزوات بیشتر به نیم‌خط سر بزنید.

www.nimkhat.com